ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

(20- 05- 2016)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολ. Βιβλίο σελ. 150 – 151

Α2. Σχολ. Βιβλίο σελ. 87

Α3. Σχολ. Βιβλίο σελ. 40

Α4. α) Σωστό

β) Λάθος

γ) Σωστό

δ) Σωστό

ε) Λάθος

ΘΕΜΑ Β

Β1.

$$f(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{5}{2}x^2+6x-1,\ \text{με}\ D_f=R$$

$$f'(x)=\frac{1}{3}\cdot 3\cdot x^2-\frac{5}{2}\cdot 2\cdot x+6\cdot 1=x^2-5x+6$$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow x^2-5x+6=0\Leftrightarrow x=2\ \text{ή}\ x=3$$

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
x^2-5x+6		$+$	0	$-$	0	$+$	

Άρα $f'(x)>0\Leftrightarrow x\in(-\infty,2)\cup(3,+\infty)$

και $f'(x)<0\Leftrightarrow x\in\cup(2,3)$

Έτσι έχουμε τον πίνακα:

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	τμ	$\searrow$	τε	$\nearrow$	

Από τον πίνακα προκύπτει ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,2]$, γνησίως φθίνουσα στο $[2,3]$ και γνησίως αύξουσα στο $[3,+\infty)$.

Παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στη θέση $x=2$ το $f(2)=\frac{11}{3}$ και τοπικό ελάχιστο στη θέση $x=3$ το $f(3)=\frac{7}{2}$.

Β2.

Η εξίσωση της εφαπτομένης ε της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(0,f(0))$ έχει εξίσωση:

$y-y_A=\lambda\cdot(x-x_A)$, όπου

$x_A=0, y_A=f(0)=-1$ και

$\lambda=f'(x_A)=f'(0)=6$

Άρα $\varepsilon: y+1=6\cdot(x-0)\Leftrightarrow y=6x-1$

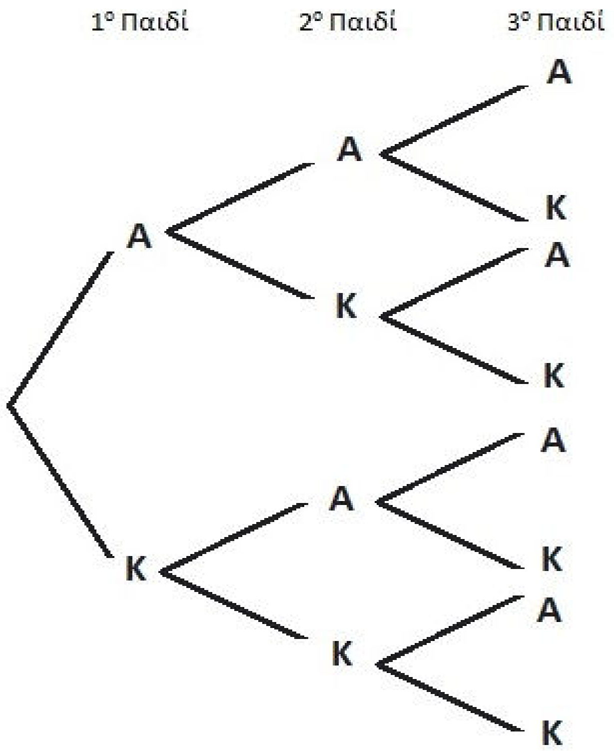
Β3.

$$\lim_{x\to-1}\frac{f'(x)-12}{x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{x^2-5x-6}{x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{(x-6)(x+1)}{x+1}$$

$$=\lim_{x\to-1}(x-6)=-7$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.



Άρα ο δειγματικός χώρος είναι:

$$\Omega = \{AAA, AAK, AKA, AKK, KAA, KAK, KKA, KKK\}$$

Γ2.

$$A = \{KAA, KAK, KKA, KKK\}$$

$$B = \{AKK, KAK, KKA, KKK\}$$

$$\Gamma = \{AAA, AAK, KKA, KKK\}$$

Γ3.

α) $\Delta = A \cap B = \{KAK, KKA, KKK\}$

$E = A \cup B = \{KAA, AKK, KAK, KKA, KKK\}$

$Z = \Gamma - E = \{AAA, AAK\}$

$$P(\Delta) = P(A \cap B) = \frac{N(A \cap B)}{N(\Omega)} = \frac{3}{8}$$

$$P(E) = P(A \cup B) = \frac{N(A \cup B)}{N(\Omega)} = \frac{5}{8}$$

$$P(Z) = P(\Gamma - E) = \frac{N(\Gamma - E)}{N(\Omega)} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

β) Είναι $H = (A \cup B)'$ οπότε

$$P(H) = P\left((A \cup B)'\right) = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$$

Είναι $\Theta = (A - B) \cup (B - A)$ και επειδή

$(A - B) \cap (B - A) = \varnothing$, δηλαδή τα ενδεχόμενα $A - B$ και $B - A$ είναι ασυμβίβαστα, έχουμε:

$$P(\Theta) = P\left((A - B) \cup (B - A)\right) = P(A - B) + P(B - A)$$
$$= P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B)$$

Όμως $P(A) = \dfrac{N(A)}{N(\Omega)} = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2}$

$P(B) = \dfrac{N(B)}{N(\Omega)} = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2}$ και από (α) έχουμε $P(A \cap B) = \dfrac{3}{8}$

Άρα $P(\Theta) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{8} + \dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{8}$

$$= 1 - \frac{3}{4}$$

$$= \frac{1}{4}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

Επειδή το πλάτος κάθε κλάσης είναι c η δεύτερη κλάση είναι η κλάση $\left[8+c, 8+2c\right]$.

Στην κλάση αυτή η κεντρική τιμή είναι $x_2 = 14$

Άρα ισχύει $\dfrac{8+c+8+2c}{2} = 14 \Rightarrow 3c = 12 \Rightarrow c = 4$

Δ2.

Οι κλάσεις που προκύπτουν , οι κεντρικές τιμές x_i και οι συχνότητες της ν_i φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

Κλάσεις	x_i	ν_i
$[8,12)$	10	20
$[12,16)$	14	15
$[16,20)$	18	10
$[20,24)$	22	ν_4

Έτσι έχουμε $\bar{x} = \dfrac{20 \cdot 10 + 15 \cdot 14 + 10 \cdot 18 + \nu_4 \cdot 22}{20+15+10+\nu_4}$

$$\Rightarrow \frac{200+210+180+22 \cdot \nu_4}{45+\nu_4} = 14$$

$$\Rightarrow \frac{590+22 \cdot \nu_4}{45+\nu_4} = 14$$

$$\Rightarrow 590 + 22 \cdot \nu_4 = 14\left(45+\nu_4\right)$$

$$\Rightarrow 590 + 22 \cdot \nu_4 = 630 + 14 \cdot \nu_4$$

$$\Rightarrow 8 \cdot \nu_4 = 40$$

$$\Rightarrow \nu_4 = 5$$

Επομένως ο πίνακας κατάλληλα συμπληρωμένος είναι:

Χρόνος (σε λεπτά)	Κεντρική Τιμή x_i	Συχνότητα v_i
$\left[8,12\right)$	**10**	20
$\left[12,16\right)$	14	15
$\left[16,20\right)$	**18**	10
$\left[20,24\right)$	**22**	**5**
ΣΥΝΟΛΟ		$v=\mathbf{50}$

Δ3.

Χωρίζοντας την 1η κλάση στα διαστήματα $\left[8,9\right)$ και $\left[9,12\right)$ με το $\left[8,9\right)$ να αποτελεί το $\frac{1}{4}$ της 1ης κλάσης και το $\left[9,12\right)$ να αποτελεί τα $\frac{3}{4}$ της 1ης κλάσης, αφού οι παρατηρήσεις είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες, παρατηρούμε ότι τουλάχιστον 9 λεπτά για να τρέξει το πρόγραμμα χρειάζονται όλοι οι υπολογιστές που ανήκουν στα διαστήματα $\left[9,12\right)$, $\left[12,16\right)$, $\left[16,20\right)$ και $\left[20,24\right)$. Το πλήθος αυτών είναι $\frac{3}{4}\cdot 20+15+10+5=45$ υπολογιστές.

Δ4.

Η διακύμανση των χρόνων είναι:

$$s^2=\frac{1}{v}\left\{\sum_{i=1}^{4}x_i^2\cdot v_i-\frac{\left(\sum_{i=1}^{4}x_i\cdot v_i\right)^2}{v}\right\}$$

Είναι $\sum_{i=1}^{4}x_i^2\cdot v_i=10^2\cdot 20+14^2\cdot 15+18^2\cdot 10+22^2\cdot 5=10600$ και

$$\sum_{i=1}^{4} x_i \cdot v_i = 10 \cdot 20 + 14 \cdot 15 + 18 \cdot 10 + 22 \cdot 5 = 700$$

Άρα $s^2 = \dfrac{1}{50} \cdot \left\{ 10600 - \dfrac{700^2}{50} \right\} = 16$ και άρα η ζητούμενη τυπική απόκλιση είναι: $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{16} = 4$.

Ο συντελεστής μεταβολής cv είναι: $cv = \dfrac{s}{\overline{x}} = \dfrac{4}{14} \approx 0,29$ ή $29\% > 10\%$

Άρα το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

Δ5.

Οι νέες κεντρικές τιμές είναι $y_i = 0,8 \cdot x_i$.

Ισχύει $\overline{y} = 0,8 \cdot \overline{x}$ και $s_y = 0,8 \cdot s$, όπου s είναι η τυπική απόκλιση του ερωτήματος Δ4. Αν cv_y είναι ο νέος συντελεστής μεταβολής τότε

$cv_y = \dfrac{s_y}{\overline{y}} = \dfrac{0,8 \cdot s}{0,8 \cdot \overline{x}} = \dfrac{s}{\overline{x}} = cv > 10\%$ cv είναι ο συντελεστής μεταβολής του ερωτήματος Δ4 . Άρα και το καινούργιο δείγμα δεν είναι ομοιογενές.