ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

(18 – 05 – 2016)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολ. βιβλίο σελ. 262

Α2. Σχολ. βιβλίο σελ. 141

Α3. Σχολ. βιβλίο σελ. 246 & σελ. 247

Α4. α. Λ

β. Σ

γ. Λ

δ. Σ

ε. Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Για κάθε $x \in R$ η f είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση με παράγωγο:

$$f'(x) = \frac{2x\left(x^2+1\right) - 2x \cdot x^2}{\left(x^2+1\right)^2}$$

$$= \frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}$$

$f'(x) = 0$ όταν $2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$f'(x) > 0$ όταν $2x > 0 \Leftrightarrow x > 0$

$f'(x) < 0$ όταν $2x < 0 \Leftrightarrow x < 0$

Έτσι έχουμε τον πίνακα:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	ε	$\nearrow$

Από τον πίνακα προκύπτει ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(-\infty,0\right]$ και γνησίως αύξουσα $\left[0,+\infty\right)$. Παρουσιάζει ελάχιστο στη θέση $x=0$ το $f\left(0\right)=0$.

Β2. Για κάθε $x\in R$ η συνάρτηση $f'\left(x\right)=\dfrac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}$ από Β1 είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο.

$$f''\left(x\right)=\frac{2\left(x^2+1\right)^2-2\left(x^2+1\right)\cdot 2x\cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^4}$$

$$=\frac{2\left(x^2+1\right)-8x^2}{\left(x^2+1\right)^3}$$

$$=\frac{2\cdot\left(-3x^2+1\right)}{\left(x^2+1\right)^3}$$

$f''\left(x\right)=0$ όταν $-3x^2+1=0\Leftrightarrow x^2=\dfrac{1}{3}\Leftrightarrow x=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ ή $x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$f''\left(x\right)>0$ όταν $-3x^2+1>0\Leftrightarrow x^2<\dfrac{1}{3}\Leftrightarrow\left|x\right|<\dfrac{\sqrt{3}}{3}\Leftrightarrow-\dfrac{\sqrt{3}}{3}<x<\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$f''\left(x\right)<0$ όταν $-3x^2+1<0\Leftrightarrow x^2>\dfrac{1}{3}\Leftrightarrow\left|x\right|>\dfrac{\sqrt{3}}{3}\Leftrightarrow x<-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ ή $x>\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Έτσι έχουμε τον πίνακα:

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{3}}{3}$		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		$+\infty$
$f''\left(x\right)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f\left(x\right)$		$\frown$		$\smile$		$\frown$	
			ΣΚ		ΣΚ		

Από τον πίνακα προκύπτει ότι η f είναι κοίλη στα διαστήματα $\left(-\infty,-\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$, $\left[\frac{\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$ και κυρτή στο διάστημα $\left[-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$.

Παρουσιάζει καμπή στις θέσεις $x_1=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ και $x_2=\frac{\sqrt{3}}{3}$

τα σημεία καμπής είναι τα σημεία $A\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{1}{4}\right)$ και $B\left(\frac{\sqrt{3}}{3},f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{1}{4}\right)$.

B3. Επειδή η f είναι συνεχής συνάρτηση στο $D_f=R$ δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες . Αν η C_f έχει ασύμπτωτη στο $-\infty$ τότε αυτή θα έχει εξίσωση $y=\lambda x+\beta$.

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{x^2}$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0\in R$. Άρα $\lambda=0$

Επίσης είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-\lambda x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2}{x^{2+1}}-0\cdot x\right)$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x^2}=1\in R$. Άρα $\beta=1$

Επομένως η C_f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$ την ευθεία με εξίσωση $y=1$.

Αν η C_f έχει ασύμπτωτη στο $+\infty$ τότε αυτή θα έχει εξίσωση $y=\lambda x+\beta$

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2}$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0 \in R. \ \text{Άρα } \lambda = 0$$

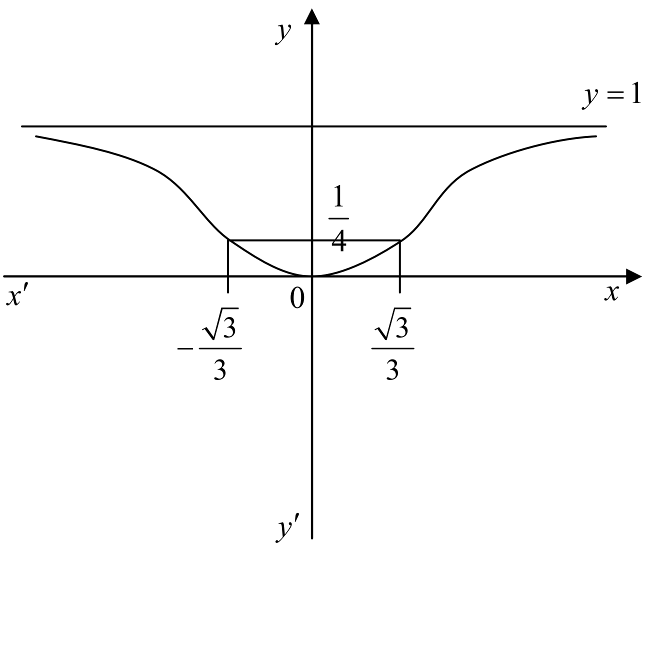
Επίσης είναι $\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-\lambda(x)\right)=$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{x^2+1}-0\cdot x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^{2+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2}=1\in R. \ \text{Άρα } \beta=1$$

Επομένως η C_f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία με εξίσωση $y=1$.

Β4. Σύμφωνα με τις απαντήσεις στα ερωτήματα Β1, Β2, Β3 έχουμε τον παρακάτω πίνακα μεταβολών της f.

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{3}}{3}$		0		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$f''(x)$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	1	↘	$\frac{1}{4}$	↘	0	↗	$\frac{1}{4}$	↗	1



ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Α΄ ΤΡΟΠΟΣ

Για κάθε $x>0$ ισχύει $\ln x \le x-1$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=1$. Επειδή ισχύει $e^{x^2}>0$ για κάθε $x\in R$ προκύπτει ότι για κάθε $x\in R$, $\ln e^{x^2} \le e^{x^2}-1 \Rightarrow x^2 \le e^{x^2}-1 \Rightarrow e^{x^2}-x^2-1\ge 0$ με την ισότητα να ισχύει μόνο όταν $e^{x^2}=1$ δηλαδή όταν $x=0$. Άρα η εξίσωση $e^{x^2}-x^2-1=0$ έχει μοναδική λύση την $x=0$.

Β΄ΤΡΟΠΟΣ

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=e^{x^2}-x^2-1$, για κάθε $x\in R$

Προφανώς $g(0)=0$. Δηλαδή η $x=0$ είναι ρίζα της εξίσωσης $g(x)=0$

Για κάθε $x\in R$ ισχύει $g'(x)=2x\cdot e^{x^2}-2x=2x\left(e^{x^2}-1\right)$

Για κάθε $x>0$ ισχύει $\begin{cases} 2x>0 \\ e^{x^2}-1>0 \end{cases} \Rightarrow g'(x)>0$

Για κάθε $x<0$ ισχύει $\begin{cases} 2x<0 \\ e^{x^2}-1<0 \end{cases} \Rightarrow g'(x)>0$

Άρα $g'(x)>0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$ και $g'(x)<0$ για κάθε $x\in(-\infty,0)$ και επειδή η g είναι συνεχής στο 0 προκύπτει ότι η g είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0]$. Από τα παραπάνω συνάγεται ότι η g παρουσιάζει στη μοναδική θέση $x=0$ ελάχιστο στο $g(0)=0$, οπότε $g(x)>0$ για κάθε $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

Επομένως η εξίσωση $g(x)=0$ άρα και η ισοδύναμή της $e^{x^2}-x^2-1=0$ έχει μία ακριβώς ρίζα την $x=0$.

Γ2. Για κάθε $x\in R$ ισχύει $f^2(x)=\left(e^{x^2}-x^2-1\right)^2 \Leftrightarrow \left|f(x)\right|=\left|e^{x^2}-x^2-1\right|$

$$\Leftrightarrow \left|f(x)\right| = e^{x^2} - x^2 - 1 \quad (1)$$

αφού από ερ. Γ1 έχουμε $e^{x^2} - x^2 - 1 \geq 0$ για κάθε $x \in R$.

Η εξίσωση $e^{x^2} - x^2 - 1 = 0$ αποδείξαμε στο Γ1 ότι έχει μία μόνο ρίζα την $x = 0$. Άρα και η εξίσωση $\left|f(x)\right| = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$ έχει μία μόνο ρίζα την $x = 0$. Αυτό σημαίνει ότι η f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$ αφού είναι συνεχής συνάρτηση στο R.

- Στο $(-\infty,0)$ αν ισχύει $f(x) > 0$ τότε από (1) προκύπτει ότι $f(x) = e^{x^2} - x^2 - 1$. Επειδή $f(0) = 0$ έχουμε $f(x) = e^{x^2} - x^2 - 1$ για κάθε $x \in (-\infty,0]$ $\quad (\alpha)$
- Στο $(-\infty,0)$ αν ισχύει $f(x) < 0$ τότε από (1) προκύπτει ότι $-f(x) = e^{x^2} - x^2 - 1 \Rightarrow f(x) = -e^{x^2} + x^2 + 1$. Επειδή $f(0) = 0$ έχουμε $f(x) = -e^{x^2} + x^2 + 1$ για κάθε $x \in (-\infty,0]$ $\quad (\beta)$
- Στο $(0,+\infty)$ αν $f(x) > 0$ τότε από (1) προκύπτει ότι $f(x) = e^{x^2} - x^2 - 1$. Επειδή $f(0) = 0$ έχουμε $f(x) = e^{x^2} - x^2 - 1$ για κάθε $x \in [0,+\infty)$,
- Στο $(0,+\infty)$ αν $f(x) < 0$ τότε από (1) προκύπτει ότι $-f(x) = e^{x^2} - x^2 - 1 \Rightarrow f(x) = -e^{x^2} + x^2 + 1$. Επειδή $f(0) = 0$ έχουμε $f(x) = -e^{x^2} + x^2 + 1$ για κάθε $x \in [0,+\infty)$ $\quad (\delta)$

Συνδυάζοντας κατάλληλα τις περιπτώσεις (α), (β), (γ), (δ) έχουμε τις παρακάτω συνεχείς συναρτήσεις:

- $f(x) = e^{x^2} - x^2 - 1$, για κάθε $x \in R$
- $f(x) = \begin{cases} e^{x^2} - x^2 - 1, & x \leq 0 \\ -e^{x^2} + x^2 + 1, & x \geq 0 \end{cases}$

- $f(x)=\begin{cases} -e^{x^2}+x^2+1, & x\le 0 \\ e^{x^2}-x^2-1, & x\ge 0 \end{cases}$
- $f(x)=-e^{x^2}+x^2+1$, για κάθε $x\in R$

Γ3. Για κάθε $x\in R$ ισχύει $f'(x)=2x\cdot e^{x^2}-2x$ και $f''(x)=2e^{x^2}+4x^2e^{x^2}-2=2\cdot\left(e^{x^2}-1\right)+4x^2e^{x^2}$

Είναι $f''(x)=0$ όταν $x=0$

Για κάθε $x>0$ είναι $x^2>0\Rightarrow\begin{cases} e^{x^2}>1 \\ 4x^2e^{x^2}>0 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} 2\left(e^{x^2}-1\right)>0 \\ 4x^2e^{x^2}>0 \end{cases}$

$$\Rightarrow 2\left(e^{x^2}-1\right)+4x^2e^{x^2}>0$$

δηλαδή $f''(x)>0$

Για κάθε $x<0$ είναι $x^2>0\Rightarrow\begin{cases} e^{x^2}>1 \\ 4x^2e^{x^2}>0 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} 2\left(e^{x^2}-1\right)>0 \\ 4x^2e^{x^2}>0 \end{cases}$

$$\Rightarrow 2\left(e^{x^2}-1\right)+4x^2e^{x^2}>0$$

δηλαδή $f''(x)>0$.

Άρα $f''(x)>0$ για κάθε $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ και επειδή f συνεχής στο 0 προκύπτει ότι η f είναι κυρτή.

Γ4. Θεωρούμε τη συνάρτηση $\phi(x)=f(x+3)-f(x)$ για κάθε $x\in R$. Για κάθε $x\in R$ ισχύει $\phi'(x)=f'(x+3)-f'(x)$**.** Επειδή η f είναι κυρτή συνάρτηση η f' θα είναι γνησίως αύξουσα στο R οπότε για κάθε $x\in R$ ισχύει $x+3>x\Rightarrow f'(x+3)>f'(x)$ οπότε $\phi'(x)>0$. Άρα η φ είναι γνησίως αύξουσα στο R.

Προφανώς η εξίσωση επαληθεύεται για $x=0$. Για κάθε $x>0$ ισχύει $|\eta\mu x|<x \Rightarrow \phi(|\eta\mu x|)<\phi(x) \Rightarrow f(|\eta\mu x|+3)-f(|\eta\mu x|)<f(x+3)-f(x)$

Άρα η εξίσωση $f(|\eta\mu x|+3)-f(|\eta\mu x|)=f(x+3)-f(x)$ έχει μια ακριβώς λύση τη $x=0$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Είναι $\int_0^\pi f(x)+f''(x)\eta\mu x dx$

$$
\begin{aligned}
&=\int_0^\pi f(x)\eta\mu x dx+\int_0^\pi f''(x)\eta\mu x dx \\
&=\int_0^\pi f(x)(-\sigma\upsilon\nu x)' dx+\int_0^\pi f'(x)'\,\eta\mu x dx \\
&=\left[-f(x)\sigma\upsilon\nu x\right]_0^\pi+\int_0^\pi f'(x)\sigma\upsilon\nu dx+\left[f'(x)\eta\mu x\right]_0^\pi-\int_0^\pi f'(x)\sigma\upsilon\nu dx \\
&=-f(\pi)\cdot\sigma\upsilon\nu\pi+f(0)\sigma\upsilon\nu 0+f'(\pi)\eta\mu\pi-f'(0)\cdot\eta\mu 0 \\
&=f(\pi)+f(0)
\end{aligned}
$$

Άρα $f(\pi)+f(0)=\pi$

Θέτουμε $g(x)=\dfrac{f(x)}{\eta\mu x}$ Είναι $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=1$ και $f(x)=g(x)\cdot\eta\mu x$ κοντά στο 0. Άρα $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0} f(g(x)\cdot\eta\mu x)=1\cdot 0=0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο R άρα και στο 0 έχουμε $f(0)=\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$. Επομένως

$$\left\{\begin{aligned} f(\pi)+f(0)&=\pi \\ f(0)& \end{aligned}\right. \Rightarrow f(\pi)=0.$$

Επιπλέον $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}\overset{f(0)=0}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{f(x)}{\eta\mu x}\cdot\dfrac{\eta\mu x}{x}\right)=$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\eta\mu x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x} = 1\cdot 1 = 1$$

Δ2. α) Υποθέτουμε ότι η f παρουσιάζει ακρότατο στη θέση $x_o \in R$. Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση στο R, σύμφωνα με το Θεώρημα Fermat θα ισχύει $f'(x_0)=0$. Για κάθε $x\in R$, παραγωγίζοντας τη δοθείσα, έχουμε $f'(x)\cdot e^{f'(x)}+1 = f'(f(x))\cdot f(x)+e^x$ και για $x = x_o$ παίρνουμε $f'(x_0)\cdot e^{f'(x_0)}+1 = f'(f(x_0))\cdot f(x_0)+e^{x_0} \overset{f'(x_0)=0}{\Rightarrow} 1 = e^{x_0} \Rightarrow$
$\Rightarrow x_0 = 0 \Rightarrow f'(0)=0$ που είναι ΑΤΟΠΟ. Άρα η υπόθεση δεν ευσταθεί και άρα η f δεν παρουσιάζει ακρότατα.

β) Εάν υποθέσουμε ότι υπάρχει $x_0\in R$ έτσι ώστε $f'(x_0)=0$ σύμφωνα με το προηγούμενο ερώτημα οδηγούμαστε σε ΆΤΟΠΟ.
Άρα για κάθε $x\in R$ ισχύει $f'(x)\neq 0$ και επειδή η f' είναι συνεχής συνάρτηση θα διατηρεί το πρόσημο στο R. Όμως $f'(0)=1>0$. Άρα $f'(x)>0$ για κάθε $x\in R$ και άρα f γνησίως αύξουσα στο R.

Δ3. Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο R και $f(R)=R$ έπεται ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ οπότε $f(x)>0$ κοντά στο $+\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{f(x)} = 0$.

Για κάθε $x\in R$ ισχύει $-1\le \eta\mu x\le 1$ και $-1\le \sigma\upsilon\nu x\le 1$ οπότε $-2\le \eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x\le 2$. Έτσι κοντά στο $+\infty$ έχουμε $\frac{-2}{f(x)}\le\frac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}{f(x)}\le\frac{2}{f(x)}$. Όμως $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{2}{f(x)}\right) = 0 = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{f(x)}$ οπότε σύμφωνα με το κριτήριο της παρεμβολής προκύπτει ότι $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x}{f(x)} = 0$.

Δ4. Η συνάρτηση $\dfrac{f(\ln x)}{x}$ είναι συνεχής στο $\left[1, e^{\pi}\right]$ και για κάθε $x \in \left[1, e^{\pi}\right]$ ισχύει

$$1 \le x \le e^{\pi} \Rightarrow \ln 1 \le \ln x \le \ln e^{\pi}$$

$$\Rightarrow 0 \le \ln x \le \pi$$

$$\overset{f \uparrow R}{\Rightarrow} f(0) \le f(\ln x) \le f(\pi)$$

$$\Rightarrow 0 \le f(\ln x) \le \pi$$

$$\overset{x>0}{\Rightarrow} 0 \le \frac{f(\ln x)}{x} \le \frac{\pi}{x}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{f(\ln x)}{x} \ge 0 \\ \dfrac{\pi}{x} - \dfrac{f(\ln x)}{x} \ge 0 \end{cases}$$

$$\underset{\text{ισχύει παντού}}{\overset{\text{Το "=" δεν}}{\Rightarrow}} \begin{cases} \displaystyle\int_1^{e^{\pi}} \frac{f(\ln x)}{x} dx > 0 \\ \displaystyle\int_1^{e^{\pi}} \left(\frac{\pi}{x} - \frac{f(\ln x)}{x} \right) dx > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \displaystyle\int_1^{e^{\pi}} \frac{f(\ln x)}{x} dx > 0 \\ \displaystyle\int_1^{e^{\pi}} \frac{\pi}{x} dx - \int_1^{e^{\pi}} \frac{f(\ln x)}{x} dx > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \displaystyle\int_1^{e^{\pi}} \frac{f(\ln x)}{x} dx > 0 \\ \displaystyle\int_1^{e^{\pi}} \frac{f(\ln x)}{x} dx < \left[\pi \ln x \right]_1^{e^{\pi}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \displaystyle\int_1^{e^{\pi}} \frac{f(\ln x)}{x} dx > 0 \\ \displaystyle\int_1^{e^{\pi}} \frac{f(\ln x)}{x} dx < \pi^2 \end{cases}$$

Επομένως $0 < \displaystyle\int_1^{e^{\pi}} \frac{f(\ln x)}{x} dx < \pi^2$