ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ 2017

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο: Θεώρημα σελ. 253

Α2. α) Ψ

β) Έστω η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\geq 0 \\ x, & x<0 \end{cases}$. Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim x^2=0,\quad \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} x=0$ και $f(0)=0$. Άρα η f είναι συνεχής στο $x_0=0$.

Όμως $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-} x=0$ και $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x}{x}=1$ δηλαδή $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}\neq\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}$. Άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$

Α3. Σχολικό βιβλίο: Ορισμός σελ. 191.

Α4. Λ – Σ – Λ – Σ – Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Η παράσταση $f(g(x))$ ορίζεται αν και μόνο αν $x\in D_g$ και $g(x)\in D_f$. Έτσι έχουμε $\begin{cases} x\neq 1 \\ \frac{x}{1-x}>0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x\neq 1 \\ x\cdot(1-x)>0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x\neq 1 \\ 0<x<1 \end{cases}\Leftrightarrow 0<x<1$

Άρα $D_{fog}=(0,1)$

Για κάθε $x\in(0,1)$ είναι $(fog)(x)=f(y(x))=\ln\frac{x}{1-x}$.

Β2. Για κάθε $x\in(0,1)$ έχουμε:

$h'(x)=........=\frac{1}{x(1-x)}>0$. Άρα η h είναι γνησίως αύξουσα και άρα είναι “$1-1$” .

Επομένως η h αντιστρέφεται και η αντίστροφή της η h^{-1} έχει πεδίο ορισμού το σύνολο τιμών της h. Δηλαδή $D_{h^{-1}} = \left(\lim\limits_{x\to 0^+} h(x), \lim\limits_{x\to 1^{-1}} f(x)\right)$ αφού η h είναι συνεχής στο $(0,1)$ και γνησίως αύξουσα σε αυτό. Είναι

$$\lim_{x\to 0^+} h(x) = \lim_{x\to 0} \ln\frac{x}{1-x} \overset{u=\frac{x}{1-x}>0}{=} \lim_{u\to 0^+} \ln u = -\infty$$ και $$\lim_{x\to 1^{-1}} \ln\frac{x}{1-x} \overset{u=\frac{x}{1-x}}{=} \lim_{u\to +\infty} \ln u = +\infty.$$

Άρα $D_{h^{-1}} = R$

Για κάθε $y \in R$ ισχύει $h(x) = y \Leftrightarrow \ln\frac{x}{1-x} = y \Leftrightarrow \frac{x}{1-x} = e^y \Leftrightarrow x = e^y - xe^y$

$x + xe^y = e^y \Leftrightarrow x\left(1+e^y\right) = e^y \Leftrightarrow x = \frac{e^y}{1+e^y}$ Άρα $h^{-1}(y) = \frac{e^y}{e^y+1}$, για κάθε $y \in R$ και άρα $h^{-1}(x) = \frac{e^x}{e^x+1}$ για κάθε $x \in R$.

Β3. Για κάθε $x \in R$ έχουμε:

$\varphi'(x) = \cdots = \frac{e^x}{(e^x+1)^2}$ και

$\varphi''(x) = \cdots = \frac{e^x - e^{2x}}{(e^x+1)^3}$.

Είναι $\varphi'(x) > 0$ για κάθε $x \in R$ και $\varphi''(x) = 0$ αν και μόνο αν

$$\begin{aligned} e^x - e^{2x} = 0 &\Leftrightarrow e^x(1-e^x) = 0 \\ &\overset{e^x>0}{\Longleftrightarrow} 1 - e^x = 0 \\ &\Leftrightarrow e^x = 1 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi''(x) > 0 &\Leftrightarrow e^x(1-e^x) > 0 \\ &\overset{e^x>0}{\Longleftrightarrow} 1 - e^x > 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow\ e^x < 1$$

$$\Leftrightarrow\ x < 0$$

$$\varphi''(x) < 0 \Leftrightarrow\ e^x(1 - e^x) < 0$$

$$\overset{e^x>0}{\Longleftrightarrow}\ 1 - e^x < 0$$

$$\Leftrightarrow\ e^x > 1$$

$$\Leftrightarrow\ x > 0$$

Έτσι έχουμε τον πίνακα

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\varphi'(x)$	$+$		$+$
$\varphi''(x)$	$+$	0	$-$
$\varphi(x)$	$\nearrow$ (κυρτή)	ΣΚ	$\searrow$ (κοίλη)

Από τον πίνακα προκύπτει ότι η φ είναι γνησίως αύξουσα στο R και δεν παρουσιάζει τοπικά ακρότατα. Επίσης η φ είναι κυρτή στο $(-\infty, 0]$, κοίλη στο $[0, +\infty)$ και έχει σημείο καμπής το σημείο $(0, \varphi(0))$, δηλαδή το σημείο $(0, \frac{1}{2})$.

B4. Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty} \varphi(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{e^x}{e^x+1}$

$= 0$ και

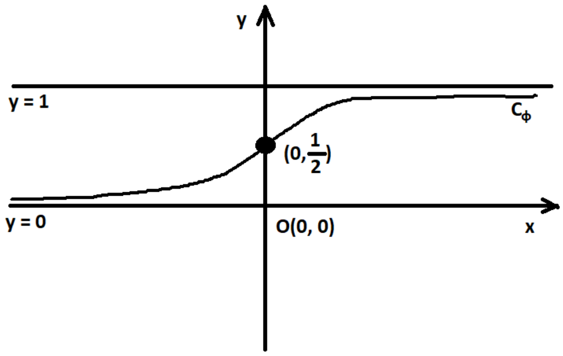
$$\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{e^x+1}$$

$$\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{(e^x)'}{(e^x+1)'}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{e^x}$$

$$= 1$$

Άρα η $C_φ$ έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$ την ευθεία y = 0 και οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία y = 1. Η ζητούμενη γραφική παράσταση όπως προκύπτει από τον πίνακα μεταβολών της φ φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



Θέμα Γ

Γ1. Η εφαπτομένη ε της $\boldsymbol{C_f}$ στο σημείο $M(x_0, f(x_0))$ έχει εξίσωση:

ε: $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

: $y + \eta\mu x_0 = -\sigma\upsilon\nu x_0(x - x_0)$

και διέρχεται από το σημείο $A(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2})$ αν και μόνο αν ισχύει:

$-\frac{\pi}{2} + \eta\mu x_0 = -\sigma\upsilon\nu x_0(\frac{\pi}{2} - x_0)$

Αρκεί να αποδείξουμε ότι η εξίσωση $-\frac{\pi}{2} + \eta\mu x = -\sigma\upsilon\nu x(\frac{\pi}{2} - x)$ έχει ακριβώς δύο ρίζες στο [0, π]. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \eta\mu x + \left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sigma\upsilon\nu x - \frac{\pi}{2}$ για κάθε $x \in [0, \pi]$. Προφανώς $g(0) = 0$ και $g(\pi) = 0$. Άρα η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει δύο ρίζες τις $x_1 = 0$ και $x_2 = \pi$ στο [0, π].

Υποθέτουμε ότι η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει τρείς ρίζες τις $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3$ στο [0,π]. Τότε $g(\rho_1) = g(\rho_2) = g(\rho_3) = 0$ και σύμφωνα με το Θεώρημα Rolle που εφαρμόζεται στα διαστήματα $[\rho_1, \rho_2]$ και $[\rho_2, \rho_3]$ υπάρχουν $\xi_1 \in (\rho_1, \rho_2)$ και $\xi_2 \in (\rho_2, \rho_3)$ τέτοια ώστε $g'(\xi_1) = 0$ και $g'(\xi_2) = 0$ που είναι ΑΤΟΠΟ, αφού η $g'(x) = \left(x - \frac{\pi}{2}\right)\eta\mu x$ μηδενίζεται στο (0, π) μόνο στο $\frac{\pi}{2}$. Άρα η υπόθεση δεν ευσταθεί και άρα η εξίσωση $g(x) = 0$ όπως και η ισοδύναμή της $-\frac{\pi}{2} + \eta\mu x = -\sigma\upsilon\nu x(\frac{\pi}{2} - x)$ έχει ακριβώς δύο ρίζες στο [0, π] τις $x_1 = 0$ και $x_2 = \pi$.

Οι εφαπτόμενες ε_1 και ε_2 της $\boldsymbol{C_f}$ στα σημεία της με τετμημένες 0 και π που διέρχονται από το $A(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2})$ είναι οι:

ε$_1$: $y - f(0) = f'(0)(x-0)$

: $y - \eta\mu 0 = -\sigma\upsilon\nu 0(x-0)$

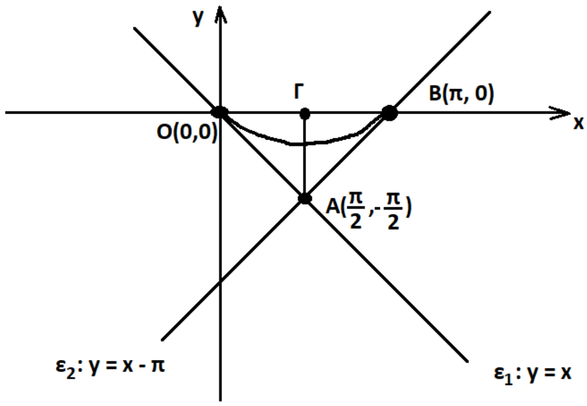
: $y = -x$

ε$_2$: $y - f(\pi) = f'(\pi)(x-\pi)$

: $y - \eta\mu\pi = -\sigma\upsilon\nu\pi(x-\pi)$

: $y = x - \pi$

Γ2. Η βασική συνάρτηση $f(x) = -\eta\mu x$ και οι ευθείες ε$_1$: y = x και ε$_2$: y = x – π έχουν γραφικές παραστάσεις που φαίνονται στο παρακάτω σχήμα:



Είναι $E_2 = \int_0^{\pi}\left(-f(x)\right)dx = \int_0^{\pi}\eta\mu x\,dx$

$= [-\sigma\upsilon\nu x]_0^{\pi} = -\sigma\upsilon\nu\pi + \sigma\upsilon\nu 0$

$= 2$ και

E_1 = (OAB) – E_2. Όμως (OAB)= $\frac{1}{2}$ (OB) (AΓ) = $\frac{1}{2}$ π $\frac{\pi}{2}$ = $\frac{\pi^2}{4}$

Οπότε E_1 = $\frac{\pi^2}{4}$ -2

Άρα $\frac{E_1}{E_2} = \frac{\frac{\pi^2}{4}-2}{2} = \frac{\pi^2}{8} - 1$

Γ3. Είναι $\lim_{x\to\pi}(f(x)+x)=\lim_{x\to\pi}(-\eta\mu x+x)=\pi>0$ και $f(x)\geq x-\pi$ για κάθε $x\in[0,\pi]$ αφού η f είναι κυρτή στο [0,π] και y = x – π η εφαπτομένη της C_f στο A(π, 0). Η ισότητα ισχύει μόνο για x = π.

Άρα κοντά στο π έχουμε $f(x)>x-\pi \Rightarrow f(x)-x+\pi>0$ και $\lim_{x\to\pi}(f(x)-x+\pi)=0$ οπότε $\lim_{x\to 1}\frac{1}{f(x)-x+\pi}=+\infty$.

Άρα $\lim_{x\to\pi}\frac{f(x)+x}{f(x)-x+\pi}=\lim_{x\to\pi}\left[(f(x)+x)\cdot\frac{1}{(x)-x+\pi}\right]=+\infty$.

Γ4. Ισχύει $f(x)\geq x-\pi$ για κάθε $x\in[0,\pi]$. Άρα $\frac{f(x)}{x}\geq 1-\frac{\pi}{x}$ οπότε

$$\int_1^e\frac{f(x)}{x}dx>\int_1^e\left(1-\frac{\pi}{x}\right)dx$$

$$=[x-\pi\cdot lnx]_1^e$$

$$=e-\pi-1$$

Θέμα Δ

Δ1. Η $f(x)=\sqrt[3]{x^4}$ είναι συνεχής στο $[-1,0)$ ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων και η $f(x)=e^x\cdot\eta\mu x$ είναι συνεχής στο (0, π] ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων. Στο x_0 = 0 έχουμε $\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}(\sqrt[3]{x^4})=0$, $\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}(e^x\cdot\eta\mu x)=0$ και $f(0)=0$. Άρα η f είναι συνεχής στο [-1, π].

Στο $[-1,0)$ έχουμε $f'(x)=\left(\sqrt[3]{x^4}\right)'$

$$=\left(|x|^{\frac{4}{3}}\right)'$$

$$=\left((-x)^{\frac{4}{3}}\right)'$$

$$=-\frac{4}{3}\cdot\sqrt[3]{-x}<0$$

Στο $(0,\pi]$ έχουμε $f'(x)=e^x\cdot(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)$. Είναι $f'(x)=0$ αν και μόνο αν

$\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x=0\Leftrightarrow\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x=0\Leftrightarrow\eta\mu x=-\sigma\upsilon\nu x\Leftrightarrow\varepsilon\varphi x=-1\Leftrightarrow x=\frac{3\pi}{4}$ στο $(0,\pi]$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{1}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\sqrt[3]{x^4}}{x}$

$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|^{\frac{4}{3}}}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{(-x)^{\frac{4}{3}}}{x}$$

$$=-\lim_{x\to 0^-}\frac{(-x)^{\frac{4}{3}}}{-x}$$

$$=-\lim_{x\to 0^-}(-x)^{\frac{1}{3}}$$

$$=-\lim_{x\to 0^-}\sqrt[3]{-x}$$

$=0$ και

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{1}=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^x\cdot\eta\mu x}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\left(e^x\,\frac{\eta\mu x}{x}\right)$$

$$=1\cdot 1$$

$$=1$$

Άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x = 0. Από τα παραπάνω προκύπτει ότι τα κρίσιμα σημεία της f είναι το x = 0 και το x = $\frac{3\pi}{4}$

Δ2. Από το Δ1 έχουμε ότι f'(x) < 0 για κάθε $x\in[-1,0)$ και $f'(x)=e^x\cdot(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)$ για κάθε $x\in(0,\pi]$. Επίσης έχουμε ότι f'(x) = 0 αν και μόνο αν x = $\frac{3\pi}{4}$.

Είναι f'(x) > 0 για κάθε $x\in(0,\frac{3\pi}{4})$ και f'(x) < 0 για κάθε $x\in(\frac{3\pi}{4},\pi]$. Έτσι έχουμε τον παρακάτω πίνακα.

x	-1		0		$\frac{3\pi}{4}$		π
$f'(x)$		$-$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$		↘		↗		↘	
	TM		TE		TM		TE

Από τον πίνακα προκύπτει ότι:

$f \downarrow [-1{,}0], f \uparrow \left[0, \frac{3\pi}{4}\right]$ και $f \downarrow \left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right]$. Παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο -1 το f(-1) = 1, τοπικό ελάχιστο στο 0 το f(0) = 0, τοπικό μέγιστο στο $\frac{3\pi}{4}$ το $f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot e^{\frac{3\pi}{4}}$ και τοπικό ελάχιστο στο π το f(π) = 0.

Για τα τοπικά μέγιστα παρατηρούμε ότι $e^{\frac{3\pi}{4}} > \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot e^{\frac{3\pi}{4}} > 1$ δηλαδή $f\left(\frac{3\pi}{4}\right) > f(-1)$. Άρα το $f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot e^{\frac{3\pi}{4}}$ είναι μέγιστο (ολικό) της f. Το κλειστό διάστημα $\left[0, \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot e^{\frac{3\pi}{4}}\right]$ είναι το σύνολο τιμών της f.

Δ3. Το ζητούμενο εμβαδόν Ε είναι $E = \int_0^{\pi} |f(x) - g(x)| dx = \int_0^{\pi} |e^x \eta\mu x - e^{5x}| dx$

Για κάθε $x \in [0, \pi]$ ισχύει

$$\begin{cases} 0 \le \eta\mu x \le 1 \\ 0 < e^x \le e^{5x} \end{cases} \Rightarrow e^x \eta\mu x \le e^{5x} \Rightarrow e^x \eta\mu x - e^{5x} \le 0$$

Άρα $E = \int_0^{\pi} (e^{5x} - e^x \eta\mu x) dx$

$$= \int_0^{\pi} e^{5x} dx - \int_0^{\pi} e^x \eta\mu x dx$$

Είναι $\int_0^{\pi} e^{5x} dx = \left[\frac{1}{5} e^{5x}\right]_0^{\pi} = \frac{1}{5} e^{5\pi} - \frac{1}{5}$

Έστω $I = \int_0^{\pi} e^x \eta\mu x dx$. Τότε είναι

$$I = \int_0^{\pi} (e^x)' \eta\mu x dx = [e^x \eta\mu x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} e^x \sigma\upsilon\nu x dx$$

$$= 0 - \int_0^{\pi} (e^x)' \sigma\upsilon\nu x dx = -[e^x \sigma\upsilon\nu x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} e^x \eta\mu x dx$$

$$= -e^{\pi} \sigma\upsilon\nu \pi + e^0 \sigma\upsilon\nu 0 - I = e^{\pi} + 1 - I$$

Άρα $I = e^{\pi} + 1 - I \Leftrightarrow 2I = e^{\pi} + 1 \Leftrightarrow I = \frac{1}{2} e^{\pi} + \frac{1}{2}$

Δηλαδή $\int_0^{\pi} e^x \eta\mu x dx = \frac{1}{2} e^{\pi} + \frac{1}{2}$.

Επομένως $E=\frac{1}{5}e^{5\pi}-\frac{1}{2}e^{\pi}-\frac{7}{10}$.

Δ4. Η εξίσωση ορίζεται στο [-1, π] όπου ισχύει ότι:

$$16\cdot e^{-\frac{3\pi}{4}}\cdot f(x)-e^{-\frac{3\pi}{4}}\cdot(4\cdot x-3\cdot\pi)^2=8\cdot\sqrt{2}\Leftrightarrow$$

$$f(x)-\left(x-\frac{3\cdot\pi}{4}\right)^2=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot e^{\frac{3\pi}{4}}\Leftrightarrow$$

$$f(x)=f\left(\frac{3\cdot\pi}{4}\right)+\left(x-\frac{3\cdot\pi}{4}\right)^2 \text{ αφού } f\left(\frac{3\cdot\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot e^{\frac{3\pi}{4}}$$

Είναι προφανές ότι η εξίσωση επαληθεύεται για $x=\frac{3\cdot\pi}{4}$. Άρα η $x=\frac{3\cdot\pi}{4}$ είναι λύση της εξίσωσης.

Από το ερώτημα Δ2 έχουμε ότι $f(x)\leq f\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ αφού το $f\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ είναι μέγιστο (ολικό) της f που το δέχεται μόνο στη θέση $x=\frac{3\pi}{4}$. Για κάθε $x\in[-1,\pi]$ ισχύει $f(x)\leq f\left(\frac{3\pi}{4}\right)\Rightarrow f(x)\leq f\left(\frac{3\pi}{4}\right)+\left(x-\frac{3\pi}{4}\right)^2$ αφού $\left(x-\frac{3\pi}{4}\right)^2\geq 0$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=\frac{3\pi}{4}$.

Άρα η λύση $x=\frac{3\pi}{4}$ είναι η μοναδική λύση της εξίσωσης.